

UNE NOUVELLE APPROCHE DANS LE CALCUL DES CABLES

M.Ezziane¹, R.Jauberthie², T.Kadri³

T. 3. Performance of concrete structures

RESUME

Le besoin de développer et d'améliorer les méthodes de calcul incite les chercheurs aujourd'hui, plus que jamais, à multiplier sans cesse leurs travaux afin d'atteindre ce but de manière satisfaisante.

L'objectif de ce travail consiste en l'élaboration d'une méthode de résolution qui concrétise de plus en plus la réalité du comportement statique d'un câble soumis à des charges concentrées, en tenant compte des facteurs de non-linéarité géométrique et de déformations élastiques.

MOTS CLES

Elément câble - Flèche - Poids propre – Non linéarité - Déplacements nodaux.

¹ Laboratoire LMPC, Département de Génie Civi, Université de Mostaganem, Algérie, ezzmed44@yahoo.fr

² Laboratoire GCM, Département de Génie Civil, INSA Rennes, France, Raoul.Jauberthie@insa-rennes.fr

³ Laboratoire LMPC, Département de Génie Civi, Université de Mostaganem, Algérie, Kadriurss@yahoo.fr

1. INTRODUCTION

L'analyse d'une structure à câble est conditionnée par le choix de la méthode de calcul. Ces méthodes aboutissent à la solution après avoir introduit certaines hypothèses simplificatrices. Il est donc évident que les hypothèses sur lesquelles se basent les méthodes de calcul doivent concrétiser d'une façon plus proche les conditions réelles du problème.

Parmi ces méthodes, celle que l'on adopte le plus souvent (méthode de calcul de V.K. Katsurine appelée méthode classique) donne la solution en adoptant l'hypothèse suivante : Le poids propre du câble est considéré distribué le long de la travée comme charge uniformément répartie quant le rapport entre la flèche du câble et la longueur de la travée ne dépasse pas 10 % (il s'agit du câble à petite flèche), ce qui est traduit par une forme parabolique du câble. Un tel procédé souffre cependant d'une limitation due à la condition de la flèche qui doit être satisfaite ($f/l \leq 10\%$). Autrement dit, son domaine d'application est restreint.

Par ailleurs, la nécessité d'une amélioration des méthodes de calcul permettant une meilleure compréhension du comportement d'une structure à câble s'avère très indispensable.

Dans cette optique, nous proposons dans le cadre de cette étude une approche permettant ainsi de pallier l'inconvénient de la méthode de calcul de V.K. Katsurine. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur les hypothèses suivantes :

- non-linéarité géométrique des câbles,
- les câbles ne possèdent pas de rigidité à la flexion,
- leur rigidité à l'extension ne varie pas avec l'effort,
- la loi de Hooke est valable,
- la direction verticale de la charge appliquée reste inchangée au cours de la déformation.

Mais, afin de mieux cerner le comportement réel d'un câble sous l'influence des charges concentrées, deux conditions doivent être ajoutées aux hypothèses précitées, à savoir :

- a) Le poids propre du câble est distribué uniformément le long du câble et non le long de la travée comme dans le cas de la méthode classique.
- b) Le câble devient discontinu sous l'application des charges concentrées.

La condition (a) a une influence sur la configuration de l'élément-câble. Cette influence est traduite par une forme hyperbolique de l'élément-câble.

La condition (b) a une influence sur la configuration de la structure à câble.

2. EQUATION FONDAMENTALE DE L'ÉLÉMENT- CÂBLE

Considérons un élément-câble soumis seulement à son poids propre g_0 , suspendu entre deux appuis fixes dont les points de suspension se situent à des niveaux différents, rapporté à un repère orthonormé (x, y) comme indiqué sur la 'Fig. 1'.

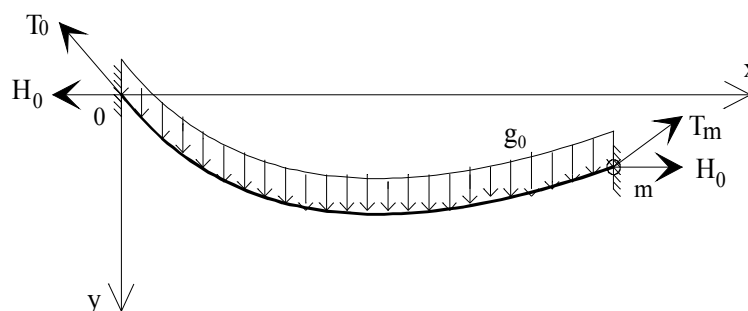


Figure 1. Élément-câble soumis à son poids propre

En supposant que le câble est idéalement flexible ; considérons un élément ds infiniment petit de l'élément-câble 'Fig. 2'.

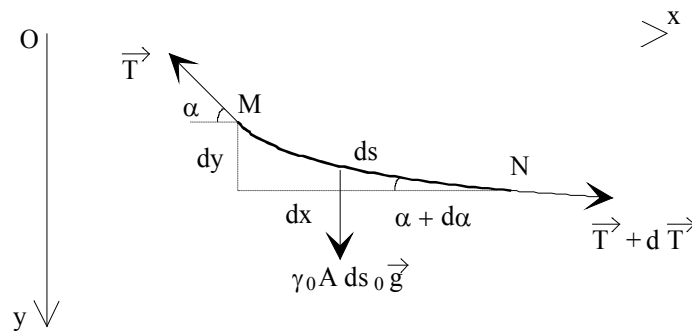


Figure 2. Equilibre d'un élément infiniment petit de l'élément-câble

Equilibre de l'élément-câble est traduite par l'équation suivante :

$$dT \cdot \sin \alpha = -\gamma_0 \cdot A \cdot ds_0 \cdot g \quad (1)$$

L'équation (1) permet de montrer que l'accroissement de la tension suivant l'axe x est nulle.

Sachant que :

$$T = \frac{H_0}{\cos \alpha} \quad (2)$$

En substituant l'équation (2) dans l'équation (1), il vient :

$$dH_0 = 0 \quad (3)$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$H_0 = \text{constante} \quad (4)$$

L'équation (4) permet de déduire que la " poussée " du câble dans n'importe quelle section est constante.

En supposant que la section transversale A du câble est constante le long de l'élément-câble, alors :

$$\text{Argsh} y' + \frac{H_0}{EA} y' = -\frac{g_0}{H_0} (x - x_i) + \text{Argsh} y'_i + \frac{H_0}{EA} y'_i \quad (5)$$

L'équation. (5) caractérise d'une façon exacte la forme de l'élément-câble, car en effet, le poids propre du câble est considéré comme une charge uniformément distribuée le long de l'élément-câble, et non le long de la travée, donc la courbe de flèche sera une hyperbole. Par conséquent, l'équation. (5) peut-être considérée comme un modèle mathématique de l'élément-câble.

3. EQUATION FONDAMENTALE SIMPLIFIEE (REDUITE)

Les termes $\frac{H_0}{EA} y'$ et $\frac{H_0}{EA} y'_i$ sont trop petits par rapport aux autres termes de l'équation. (5), donc ils peuvent être négligés en commettant une erreur de l'ordre de 0,001%. Par suite l'équation (5) devient :

$$Argshy' = -\frac{g_0}{H_0}(x - x_i) + Argshy'_i \quad (6)$$

En introduisant la fonction hyperbolique sh (fonction réciproque de Argsh) aux deux membres de l'équation (5), il vient alors :

$$y' = sh \left[-\frac{g_0}{H_0}(x - x_i) + Argshy'_i \right] \quad (7)$$

L'équation (7) exprime la relation entre la dérivée y' de déplacement d'une section quelconque et la tension horizontale H_0 du câble.

4. CAS D'UN ELEMENT-CABLE DISCONTINU

Considérons un élément-câble composé en plusieurs chaînes de câbles, suspendu aux deux points fixes 0 et m 'Fig. 3'.

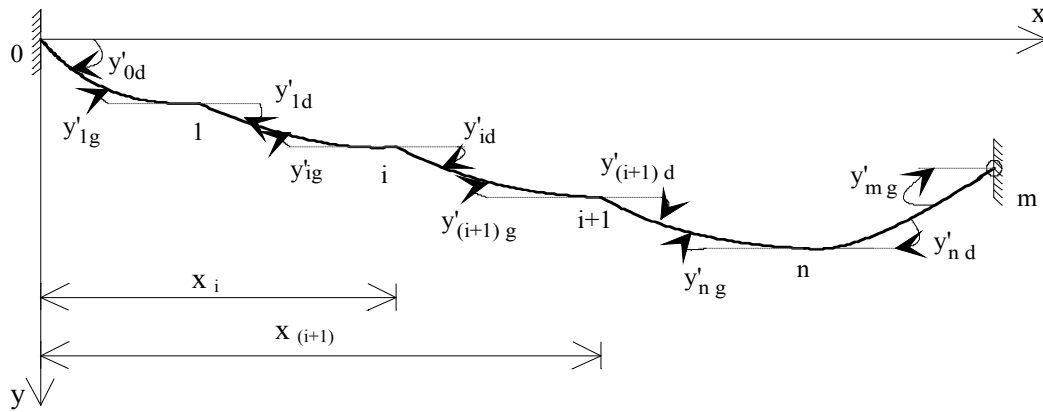


Figure 3. Elément-câble discontinu

Considérons une chaîne de câble comprise entre les sections (i) et (i+1), et appliquons l'équation (7). L'équation fondamentale sera donc écrite sous la forme :

$$y'_{(i+1)g} = ch \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) y'_{id} - sh \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) \sqrt{1 + y'^2_{id}} \quad (8)$$

5. EQUATION DE LA FLECHE DE L'ELEMENT-CABLE

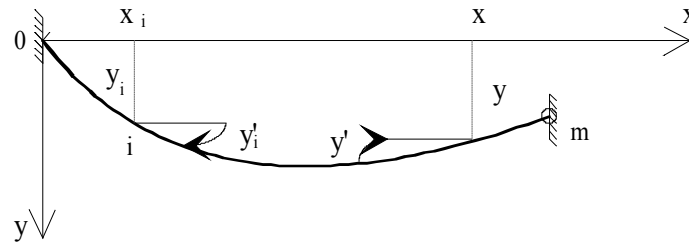


Figure.4. Schéma de calcul de flèche de l'élément-câble

L'équation de la courbe de flèche est obtenue en faisant l'intégration de l'équation fondamentale réduite (7) entre les bornes $[y, y_i]$ correspondantes aux abscisses $[x, x_i]$ comme indiqué ci-dessus sur la 'Fig.4'.

$$y = \frac{H_0}{g_0} \left[\sqrt{1 + y_i'^2} - \sqrt{1 + y'^2} \right] + y_i \quad (9)$$

La relation (9) traduit l'équation de la courbe de flèche qui est fonction de la dérivée de déplacement et de la tension horizontale de l'élément-câble.

Considérons un tronçon de l'élément-câble entre deux sections (i) et (i+1), schématisé par la 'Fig. 5'.

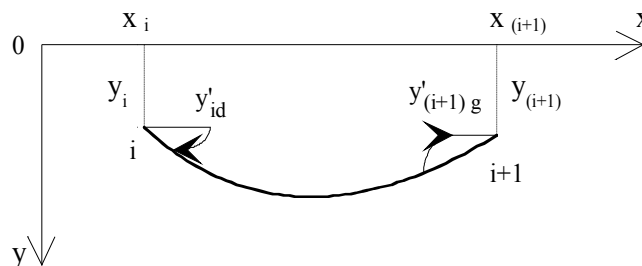


Figure 5. Schéma de calcul de flèche d'un tronçon de l'élément-câble

En appliquant l'équation. (9), on obtient :

$$y_{(i+1)} = \frac{H_0}{g_0} \left\{ \left[1 - ch \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) \right] \sqrt{1 + y_{id}'^2} + sh \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) y_{id}' \right\} + y_i \quad (10)$$

6. LONGUEUR DE L'ELEMENT-CABLE

Soit un tronçon de l'élément-câble entre deux sections (i) et (i+1) , de longueur L_{0i} . Considérons un élément infiniment petit ds (fig. 6).

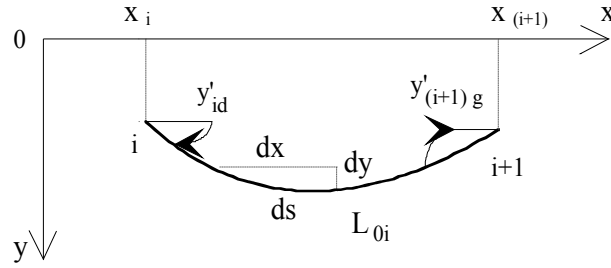


Figure 6. Longueur d'un tronçon de l'élément-câble

La longueur de l'élément-câble est définie par :

$$L_{0i} = \int_{x_i}^{x_{(i+1)}} ds = \int_{x_i}^{x_{(i+1)}} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (11)$$

Après intégration de cette équation, il en résulte :

$$L_{0i} = \frac{H_0}{g_0} \left\{ y'_{id} - sh \left[-\frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) + \text{Argsh} y'_{id} \right] \right\} = \frac{H_0}{g_0} (y'_{id} - y'_{(i+1)g}) \quad (12)$$

La longueur totale de l'élément-câble est déterminée comme suit :

$$L_0 = \sum_{i=0}^n L_{0i} \quad \text{Où } n \text{ représente le nombre de sections (ou noeuds).}$$

Comme l'élément-câble, soumis à son poids propre, étant continue dans toutes les sections, voir 'Fig. 1', alors la longueur totale L_0 peut-être déduite directement de l'éq. (12), d'où

$$L_0 = \frac{H_0}{g_0} (y'_{0d} - y'_{mg}) \quad (13)$$

Où y'_{mg} est déterminée à partir de l'éq. (8) :

$$y'_{mg} = ch \frac{g_0}{H_0} x_m \cdot y'_{0d} - sh \frac{g_0}{H_0} x_m \cdot \sqrt{1 + y'_{0d}{}^2} \quad (14)$$

7. ALLONGEMENT ELASTIQUE DE L'ELEMENT-CABLE

L'allongement élastique est donné par :

$$\Delta ds = \frac{T ds}{EA} = \frac{H_0}{\cos \alpha} \cdot \frac{ds}{EA} = \frac{H_0}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{dx}{EA} \quad (15)$$

Intégrons l'expression de Δds entre les bornes $[x_1, x_{(i+1)}]$, il s'ensuit :

$$\Delta L_{0i} = \frac{H_0}{EA} \int_{x_i}^{x_{(i+1)}} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (16)$$

Or le terme d'intégrale n'est que la longueur de l'élément-câble L_{0i} , d'où il vient :

$$\Delta L_{0i} = \frac{H_0^2}{EA \cdot g_0} (y'_{id} - y'_{(i+1)g}) \quad (17)$$

Où ΔL_{0i} est l'allongement élastique d'un tronçon de l'élément-câble entre deux sections (i) et (i+1). De même, l'allongement élastique total de l'élément-câble est obtenu en faisant la sommation de ΔL_{0i} , compte tenu de la remarque que l'élément-câble sous son poids propre est continue, alors l'expression finale de ΔL_0 sera donc :

$$\Delta L_0 = \frac{H_0^2}{EA \cdot g_0} (y'_{0d} - y'_{mg}) \quad (18)$$

8. LONGUEUR INITIALE DE L'ÉLÉMENT-CÂBLE

La longueur initiale de l'élément-câble est équivalente à la longueur de l'élément-câble sous son poids propre diminuée de tout allongement élastique. Donc elle est définie comme suit :

$$\bar{L}_0 = L_0 - \Delta L_0 \quad (19)$$

En remplaçant L_0 et ΔL_0 par leurs expressions respectives (12) et (17), il en résulte :

$$\bar{L}_0 = \frac{H_0}{g_0} \left(1 - \frac{H_0}{EA} \right) (y'_{0d} - y'_{mg}) \quad (20)$$

9. DETERMINATION DE LA TENSION HORIZONTALE H_0 DE L'ÉLÉMENT-CÂBLE

L'expression reliant y'_{id} à H_0 est déduite directement à partir de l'équation de la courbe de flèche (9). Par conséquent :

$$A_i y'^2_{id} - B_i y'_{id} + C_i = 0 \quad (21)$$

Avec :

$$A_i = 2 \left[ch \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) - 1 \right]; \quad B_i = 2 \frac{g_0}{H_0} (y_{(i+1)} - y_i) \cdot sh \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i)$$

$$C_i = \left[\frac{g_0}{H_0} (y_{(i+1)} - y_i) \right]^2 - \left[ch \frac{g_0}{H_0} (x_{(i+1)} - x_i) - 1 \right]^2$$

La résolution de l'équation (21) permet de déterminer la dérivée de déplacement dans la section (i) et la tension horizontale de l'élément-câble. Mais cette équation ne peut pas être résolue directement, c'est pourquoi la résolution par la méthode itérative est imposée.

10. TENSION DANS L'ÉLÉMENT-CÂBLE

La tension dans une section quelconque (i) de l'élément-câble est donnée par :

$$T_i = H_0 \sqrt{1 + y_i'^2} \quad (22)$$

CONCLUSION

En considérant comme inconnues les dérivées des déplacements nodaux et la tension horizontale du câble, la méthode d'analyse proposée, dans le cadre de cet article, permet de concrétiser d'une manière très proche la forme réelle d'un élément-câble. Donc, elle nous permet de donner une analyse statique plus précise du câble.

Quant à son domaine d'application, on constate que la condition de flèche, qui est imposée dans la théorie classique, n'a pas de sens dans cette analyse. Autrement dit, son domaine d'application est plus vaste.

REFERENCES

Trinh L.T, 'Ca'ch tinh hêtreo so' dô biên dang' (Méthode de calcul des systèmes à câble par le schéma déformable), Hanoi 1985, pp. 15-163.

Schlaich J. 'Les structures légères', Anales de L'ITBP. N°.479, Série technique générale de la construction 120, Décembre 1989, pp. 12-33.

Jennings A. 'Les ponts suspendus', Construction News Magazine, December 1983, pp. 34-35.

Troitsky M.S. 'Cable-Stayed Bridges', Second edition, 1988, pp. 41-195.

Coyette J.P, Guisset P. 'Cable network analysis by a nonlinear programming technique', Eng. Struct., Vol. 10, January 1988, pp. 41-46.

Nishino F., Duggal R., Loganathan S. 'Design analysis of cable networks', Journal of Structural Engineering, Vol. 115, N°. 12, December 1989, pp. 3123-3141.

Ahmadi-Kashani K. 'The analysis of cables subject to uniformly distributed loads', Eng. Struct., Vol. 10, July 1988, pp. 174-184.

Jennings A 'Deflection theory analysis of different cable profiles for suspension bridges', Eng. Struct., Vol. 9, April 1987, pp. 84-94.

Jennings A. 'Gravity stiffness of classical suspension bridges', Journal of Structural Engineering, Vol. 109, N°. 1, January 1983, pp. 16-36.

Kassimali A., Parsi-Feraidoonian H. 'Strength of cable trusses under combined loads', Journal of Structural Engineering, Vol. 133, N°. 5, May 1987, pp. 907-924.

Krishna P., Gupta V.K., Ahuja A.K., 'Mittal A.K. Performance of cable trusses under static loads', Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 108, N°. ST1, January 1982, pp. 265-282.

Mauro A., De Poi L. 'Statique des réseaux tridimensionnels de câbles', Construction Métallique, N°. 2, 1974, pp. 49-59.